KVADRATURNE FORMULE ZA RAZVOJ METODA U MEHANICI

Tomislav S. Igić, Gradimir V. Milovanović i Dragana Turnić

1. Uvod

Metod Hajdina [10] u vreme kada se pojavio promenio je shvatanja mnogih komplikovanih problema teorije konstrukcija i građevinarstva koji su se svodili na rešavanje diferencijalnih jednačina, a nisu mogli biti rešavani u zatvorenom obliku. Naime, filozofija ovog metoda je bila u tome da diferencijalnu jednačinu ili sistem diferencijalnih jednačina datog problema svede, zajedno sa graničnim uslovima, na integralnu ili sistem integralnih jednačina. Jezgro koje množi nepoznatu funkciju u odgovarajućem integralnom operatoru je Green-ova funkcija. Ona u mnogim problemima predstavlja uticajnu funkciju, odnosno, uticajnu liniju zavisno od problema koji se tretita. Prednosti koje se ovim postupkom pružaju su povoljnije i lakše uzimanje komplikovanih graničnih uslova i kada je u pitanju složena geometrija praktičnih problema. Takođe, kod numeričkog rešavanja postupak je ovde stabilniji, a tačnost je veća, čime se broj linearnih algebarskih jednačina u numeričkom postupku može smanjiti. Ovaj metod se proširio u primenama na probleme površinskih i prostornih složenih konstrukcija (brane, ljuske i dr.), probleme dinamike, stabilnosti, itd.

Ovaj rad je nastao na osnovu rezultata iz naših prethodnih radova [19], [18], [20].

Postoji mišljenje da se sa pojavom Metode konačnih elemenata (MKE) i moderne računarske tehnologije smanjuje primena ovog metoda. Međutim, u rešavanju praktičnih problema u građevinarstvu i šire primenom MKE, kao i Metoda graničnih elemenata (MGE), javlja se potreba za rešavanjem problema kod kojih su odgovarajući integrali opterećeni singularitetima na različite načine i zahtevaju specijalni numerički tretman. Suština naših istraživanja je šira primena i opštije shvatanje Hajdinovog metoda u kontekstu najnovijih teorija i naših originalnih postupaka za ekstrakciju tih singulariteta i poboljšanje tačnosti rešenja.

Dve vrste singulariteta su tipične: algebarski i logaritamski singulariteti. Müntz-ovi i Müntz-logaritamski polinomi su tipične funkcije sa takvim svojstvima i oni se mogu koristiti za dobijanje efikasnih metoda za integraciju. Takođe, tačno izračunavanje jednostrukih i višestrukih integrala sa kvazi-singularitetima, tj. kada je putanja integracije u blizini singulariteta, je veoma značajno.

Na kraju ovog rada daćemo izvesne napomene o jednom drugačijem pristupu koji omogućava dobijanje Gauss-ovih kvadratura za Müntz-ove sisteme (za detalje videti Milovanović [21] i [18] i Milovanović i Cvetković [22]).

Godine 1972 Hajdin i Krajčinović [9] su predstavili jedan integracioni metod za rešenje problema graničnih vrednosti (BVP) za obične diferencijalne jednačine. Metod uključuje konstrukciju samo jednostavne polinomske Green-ove funkcije i daje veoma dobru tačnost. Uopšte, numerička integracija je tačniji proces, nego što je numeričko diferenciranje koje je implicitno uključeno u metodu konačnih razlika (za analizu grešaka videti [2]). Hajdin i Krajčinović su razmatrali potpuno nehomogen sistem (BVP) $Lu = f(x)$, $a \le x \le b$, sa graničnim uslovima u $x=a$ i $x=b$, datih kao $B_1(u)=\alpha$ i $B_2(u)=\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), gde je L linearni diferencijalni operator n-tog reda, $f(x)$ je proizvoljna funkcija od x, a B_1 i B_2 su izvesne linearne kombinacije funkcije $u(x)$ i njenih izvoda do reda $n-1$. Konstrukcijom Green-ove funkcije $G(x,y)$, oni su sveli dati diferencijalni problem graničnih vrednosti na Fredholm-ovu integralnu jednačinu druge vrste

$$u(x) + \int_a^b G(x,y)u(y)\,dy = g(x), \qquad a < x < b, \tag{1}$$

gde je $g(x)$ poznata funkcija. Oni su koristili dva načina za rešavanje integralne jednačine (1):

- kvadraturno pravilo i pogodno odabrane kolokacione tačke za svođenje jednačine (1) na sistem linearnih algebarskih jednačina;
- aproksimaciju $u(x)$ splain funkcijom datoga reda.

Iako su problemi tretirani u [9] povezani sa teorijom konstrukcija i mehanikom, sâm metod je mnogo opštiji. Danas se integralne jednačine pojavljuju u mnogim poljima uključujući mehaniku kontinuuma, kvantnu mehaniku, optimizaciju i optimalno upravljanje sistema, kinetičku teoriju gasova, teoriju komunikacija, geofiziku, elektrostatiku i magnetizam, teoriju potencijala, biologiju i genetiku, matematičku ekonomiju, teoriju redova čekanja, akustiku, itd.

Uopšte, Fredholm-ove integralne jednačine druge vrste (FK2) su date kao

$$u(x) + \mu \int_A K(x,y)u(y)w(y)\,dy = g(x), \qquad x \in A \subset \mathrm{R}, \tag{2}$$

gde je $K(x,y)$ jezgro, w je data težinska funkcija, g je poznata funkcija, $\mu \in \mathrm{R}$je parametar, a u je nepoznata funkcija. Danas postoji mnogo numeričkih metoda za rešavanje integralnih jednačina (videti, na primer, [1], [12]). Ponekad su one razvijene za specifične tipove jezgara. Numerički metodi za ovu vrstu integralnih jednačina (FK2) vode do sistema linearnih algebarskih jednačina i vrlo često su ti sistemi loše uslovljeni. Rešenje integralne jednačine može biti dato u obliku polinoma, splajn funkcije, kao deo-po-deo polinom, itd. Za novije veoma efikasne metode (videti [5], [17], [16]).

Neke metode za svođenje integralne jednačine (2) na sistem linearnih jednačina zahtevaju kvalitetne kvadraturne formule za aproksimaciju težinskog integrala u (2). Dodatno, napomenimo da metod graničnih elemenata (MGE) kao i metod konačnih elemenata (MKE), koji su veoma popularni u računarskim primenama u inženjerstvu (teorija konstrukcija, mehanika loma, mehanika oštećenja, elektromagnetika, difrakcija itd.), veoma često zahtevaju veoma tačnu numeričku integraciju jednostrukih ili višestrukih integrala sa singularnim jezgrima i/ili singularnim bazisnim funkcijama.

U ovom radu predlažemo metod za konstrukciju težinskih Gauss-ovih kvadraturnih formula za integrale sa algebarskim i/ili logaritamskim singularitetima. Uopšte, kvadrature Gauss-ovog tipa su veoma prikladne kod metoda za rešavanje integralnih jednačina tipa (2).

2. Kvadraturne formule za integrale sa logaritamskim težinskim funkcijama

U numeričkoj implementaciji MGE (videti [11, Poglavlja 4 i 5]), kvadraturne formule igraju vrlo važnu ulogu, pogotovo za elemente višeg reda. Za izračunavanje integrala sa odgovarajućim uticajnim koeficijentima (za vandijagonalne i dijagonalne elemenate), kvadrature Gaussovog tipa su vrlo prikladne. Za dovoljno glatke funkcije na konačnom intervalu $[a,b]$ linearna transformacija na standardni interval $[-1,1]$ može se koristiti i tada primena Gauss-Legendre-ove kvadraturne formule daje numeričku integraciju sa zadovoljavajućom tačnošću. Međutim, za integrale sa logaritmskim singularitetom i/ili nekom vrstom algebarskih singulariteta konvergencija odgovarajućih kvadraturnih procesa je veoma spora, tako da se određene težinske kvadraturne formule preporučuju. U takvim slučajevima, težinske funkcije odgovarajućih Gauss-ovih kvadratura uključuju one „teške delove“ integranda koje sadrže singularitete. U ovom delu ćemo razmotriti nekoliko slučajeva takvih kvadratura na standardnom intervalu [0, 1]. Međutim, prvo ćemo dati neke opšte pojmove o Gaussovim kvadraturama.

2.1. Opšti pojmovi o Gauss-ovim kvadraturnim formulama

Neka je $\mathcal{P}_m$ skup svih algebarskih polinoma stepena ne višeg od m. Posmatramo težinske kvadraturne formule sa n-tačaka

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{3}$$

gde je težinska funkcija $w(x)$ takva da svi njeni momenti postoje, $\mu_k = \int_a^b x^k w(x)\,dx < +\infty$, k=0,1,..., i da je $\mu_0 > 0$. Kvadraturno pravilo (3) je poznato kao interpolaciono ako je ono tačno za sve polinome stepena najmanje $n-1$, tj. ako je ostatak $R_n(f)$ jednak nuli za svako $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Međutim, ako su čvorovi x_k i težine A_k u (3) tako odabrani da je $R_n(f) = 0$ za svako $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$, pravilo (3) je Gaussova kvadraturna formula maksimalnog stepena tačnosti. U tom slučaju, čvorovi x_k su nule moničnih ortogonalnih polinoma $\pi_n(w;x)$ i A_k odgovarajuće težine

(Christoffel-ovi brojevi), koji se mogu izraziti preko takozvanih Christoffel-ovih funkcija $\lambda_n(w;x)$ (videti [15, Poglavlja 2 i 5]) u obliku $A_k = \lambda_n(w;x_k) > 0,\ k = 1,...,n$. Pozitivnost Christoffel-ovih brojeva je vrlo značajna za konvergenciju kvadraturnih formula. U specijalnom slučaju $w(x)=1$ na [-1, 1], čvorovi x_k su nule Legendre-ovih polinoma $P_n(x)$. To je bilo originalno otkriće Gaussa, 1814. godine, naravno, bez teorije ortogonalnosti. Kao što znamo (videti [15], poglavlje 2), monični polinomi $\pi_n(w;x)$ ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju $w(x)$ na intervalu $[a,b]$ zadovoljavaju tročlanu rekurentnu jednačinu

$$\pi_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \qquad k = 0,\ 1,\ 2,..., \tag{4}$$
$$\pi_0(t) = 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0,$$

gde su $(\alpha_k) = (\alpha_k\ (w))$ i $(\beta_k) = (\beta_k\ (w))$ nizovi rekurzivnih koeficijenata. Koeficijent β_0 koji se množi sa $\pi_{-1}(x) = 0$ u rekurentnoj relaciji (4) može biti proizvoljan, ali je pogodno da se on definiše kao $\beta_0 = \mu_0 = \int_a^b w(x)\,dx$.

Za generisanje Gaussovih kvadraturnih pravila postoje numeričke metode, koje su u numeričkom smislu mnogo efikasnije i tačnije nego izračunavanje čvorova korišćenjem Njutnovog metoda, a zatim direktna primena klasičnih Christoffel-ovih izraza za težine (videti, na primer, Davis i Rabinowitz [4]). Karakterizacija Gaussovih kvadratura preko problema sopstvenih vrednosti za Jacobi-evu matricu

$$J_n(w) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

postala je osnova modernih metoda za generisanje Gauss-ovih kvadratura.

Najpopularnija od tih metoda je, svakako, procedura Golub-a i Welsch-a [8]. Njihova metoda je zasnovana na određivanju sopstvenih vrednosti i prvih komponenata sopstvenih vektora simetrične tridijagonalne Jacobi-eve matrice (5), gde su α_ν i β_ν, $\nu = 0, 1,..., n-1$, koeficijenti u tročlanoj rekurentnoj relaciji (4), za monične ortogonalne polinome $\pi_\nu(w;\ \cdot)$. Naime, čvorovi x_k u Gauss-ovoj kvadraturnoj formuli (3) u odnosu na težinsku funkciju $w(x)$ na $[a,b]$, su sopstvene vrednosti Jacobi-eve matrice (5) n-tog reda. Težine A_k su date kao

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

gde je $\beta_0 = \mu_0 = \int_a^b w(x)\,dx$ i $v_{k,1}$ je prva komponenta normalizovanog sopstvenog vektora v_k koji odgovara sopstvenoj vrednosti x_k,

$$J_n(w)v_k = x_k v_k, \qquad v_k^T v_k = 1, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Pojednostavljujući QR algoritam tako da se samo prve komponente sopstvenih vektora računaju, Golub i Welsch [8] su dali efikasan postupak za konstrukciju Gauss-ovih kvadraturnih formula. Taj postupak je uvršćen u više programskih paketa, uključujući naš paket ``OrthogonalPolynomials'' koji je realizovan u programskom sistemu Mathematica (videti [3]).

Dakle, mi tražimo rekurzivne koeficijente α_k i β_k, $k \le N-1$, za monične polinome $\pi_\nu(w;\,\cdot)$, kako bismo mogli konstrusati Gauss-Christofell-ove kvadraturne formule u n tačaka, u odnosu na težinu $w(x)$, za svako $n \le N$. Ovi koeficijenti su poznati eksplicitno za klasične ortogonalne polinome (videti [15, poglavlje 2]). U drugim slučajevima, nama je potrebna dodatna numerička konstrukcija rekurzivnih koeficijenata korišćenjem metoda momenata ili takozvanog diskretizovanog Stieltjes-ovog postupka (videti [15, § 2.4.8]).

2.2. Gaussova formula za težinu $w(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \log(1/x)$

Posmatramo kvadraturnu formulu u n-tačaka

$$\int_0^1 f(x)(1-x)^\alpha x^\beta \log\frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{6}$$

sa parametrima $\alpha,\beta > -1$ u težinskoj funkciji $w(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \log(1/x)$. Piessens i Branders [25] su razmatrali slučajeve kada su $\alpha = 0$ i $\beta = 0, \pm 1/2, \pm 1/3, -1/4, -1/5$ (videti, takođe, Gautschi [6] i [7]). Kvadraturni parametri za $n \le 8$ su dati kod Katsikadelisa [11, str. 297–298] u slučaju $\alpha = \beta = 0$.

Koristeći simboličku integraciju nalazimo momente $\mu_k = \mu_k(\alpha,\beta)$ sa gama funkcijama i harmonijskim brojevima,

$$\begin{aligned}\mu_k(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^k w(x)\,dx &= \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{k+\beta} \log\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)}\Big[H(\alpha+\beta+k+1) - H(\beta+k)\Big]\end{aligned} \tag{7}$$

Na primer, za $\alpha = \beta = 0$ moment se redukuje na $\mu_k(0,0) = 1/(k+1)^2$, $k \ge 0$.

Standardno značenje k-tog harmonijskog broja H_k je zbir recipročnih vrednosti prvih k prirodnih brojeva, tj.

$$H_k = H(k) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu},$$

a njegovo predstavljanje je dao Euler u obliku

$$H(k)=\int_0^1 \frac{1-t^k}{1-t}\,dt=\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}\binom{k}{\nu}.$$

Uzimajući razlomljeni argument x između 0 i 1, harmonijski broj $H(x)$ je definisan prethodnim integralom, gde je k jednostavno zamenjeno sa x. Tada to može biti generisano pomoću

$$H(x)=H(x-1)+\frac{1}{x} \qquad \text{ili} \qquad H(1-x)-H(x)=\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}.$$

Još opštije, za svako $x > 0$ (celo ili ne), harmonijski broj je određen pomoću

$$H_k = x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(x+k)}=\psi(x+1)+\gamma,$$

gde je $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ tzv. digamma funkcija, tj. logaritamski izvod gama funkcije $\Gamma(x)$, dok je $\gamma = 0.577215664901532...$ Euler-Mascheroni-eva konstanta.

Korišćenje Mathematica programskog paketa `OrthogonalPolynomials` [3] i prvih $2N$ momenata μ_k, $k = 0, 1, ..., 2N-1$, datih preko (7), dobijamo prvih N koeficijenata α_k i β_k, $k = 0, 1, ..., 2N-1$, u rekurentnoj relaciji (4). To nam omogućava da dobijemo kvadraturne parametre u (6) za svako $n \le N$.

Napomena. U cilju savladavanja striktne loše numeričke uslovljenosti pri dobijanju rekurzivnih koeficijenata sa zadovoljavajućom tačnošću, može se koristiti aritmetika višestruke preciznosti. Na primer, u najjednostavnijem slučaju $\alpha = \beta = 0$, radeći sa aritmetikom sa 55 decimalnih cifara, dobijamo prvih $N = 50$ rekurzivnih koeficijenata sa oko 20 tačnih decimalnih cifara.

Sledeći kôd u Mathematica programskom paketu `OrthogonalPolynomials` [3] generiše rekurzivne koeficijente za $k \le 2N-1 = 99$ i kvadraturne parametre (čvorove i težine) sa 20 tačnih decimalnih cifara za $n = 10\ (10)\ 50$:

```
In[1]:= <<orthogonalPolynomials`
In[2]:= w[t_,a_,b_]:=(1-t)^a t^b Log[1/t]
In[3]:= m=Integrate[t^k w[t,0,0],{t,0,1}];moments=Table[m,{k,0,99}];
In[4]:= {alpha,beta}=aChebyshevAlgorithm[moments,
                          WorkingPrecision->55];
In[5]:= param=Table[aGaussianNodesWeights[n,alpha,beta,Precision->20,
                        WorkingPrecision->20],{n,10,50,10}];
```

Na primer, dobijeni čvorovi i težine za $n = 10$ dati su na sledećem listingu:

```
In[6]:= param[[1]]
```

```
Out[6]=
      {{0.0090426309621996506369, 0.053971266222500629504,
      0.13531182463925077487, 0.24705241628715982422,
      0.38021253960933233397, 0.52379231797184320116,
      0.66577520551642459722, 0.79419041601196621736,
      0.89816109121900353817, 0.96884798871863353939},
      {0.12095513195457051499, 0.18636354256407187033,
      0.19566087327775998271,  0.17357714218290692084,
      0.13569567299548420167,  0.093646758538110525987,
      0.055787727351415874076, 0.027159810899233331146,
      0.0095151826028485149993,0.0016381576335982632549}}
```

Primer 1. Razmotrimo integral

$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)^{-1/2} x^{-1/2} \log(1/x)}{\sqrt{1+x}}\, dx, \tag{8}$$

čija je vrednost poznata (videti [7])

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4.118718374926872014366740\ldots .$$

Linearnom transformacijom $2x - 1 = t$, ovaj integral se svodi na

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{3+t}} \log\frac{2}{1+t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Primena standardne Gauss-Legendre-ove kvadrature daje veoma sporu konvergenciju. Realtivne greške r_n(GL) za n = 10 (10) 100 prikazane su u Tabeli 1. Brojevi u zagradama označavaju decimalne eksponente. Nešto bolji rezultati mogu se dobiti pomoću Gauss-Čebiševljevih kvadratura u odnosu na težinsku funkciju $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. Odgovarajuće relativne greške r_{n} (GC), takođe, su prikazane u istoj tabeli.

Međutim, možemo direktno primeniti kvadraturnu formulu (6) na integral (8). Neka su

$$Q_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad \text{i} \qquad r_n^{(\alpha,\beta)} = \left| (Q_n^{(\alpha,\beta)} - I)/I \right| . \tag{9}$$

Uzimajući kvadraturnu formulu sa logaritamskom težinom $w(x)$=log(1/x), odgovarajuća funkcija u (8) je $f(x) = 1/\sqrt{x(1-x^2)}$. Konvergencija ove formule je opet spora. Relativne greške $r_n^{(0,0)}$ su date u Tabeli 1.

Ali, ako uključimo, takođe, algebarske singularitete u težinu, tj. ako uzmemo $w(x) = (1-x)^{-1/2} x^{-1/2} \log(1/x)$ $\left(\alpha = \beta = -1/2\right)$, konvergencija postaje veoma brza. Gauss-ove aproksimacije $Q_n^{(-1/2,-1/2)}$ i odgovarajuće relativne greške su date u drugom delu Tabele 1 za male vrednosti $n \leq 10$. Netačne decimalne cifre su podvučene. Kao što možemo videti, 17 tačnih decimalnih cifara je dobijeno korišćenjem Gauss-ovog pravila sa samo n=10 čvorova.

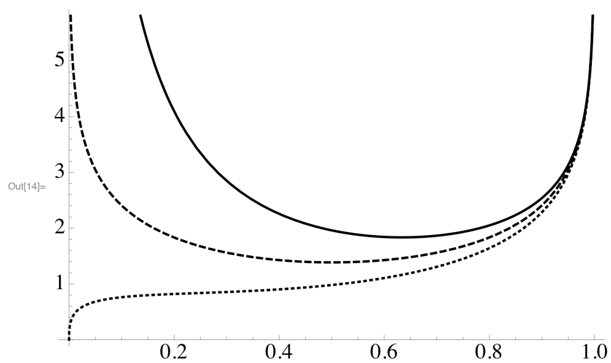
Isti metod omogućuje nam da uključimo, takođe, logaritamski singularitet pri $x = 0$. Tako možemo razmatrati težinsku funkciju

$$w(x) = w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha} x^{\beta} \log\frac{1}{x(1-x)}, \qquad \alpha, \beta > -1.$$

Tabela 1. Relativne greške kvadraturnih suma za n=10(10)100 i Gauss-ovih aproksimacija u odnosu na logaritamsku težinu i odgovarajuće greške za n=1(1)10.

n	$r_n(GL)$	$r_n(GL)$	$r_n^{(0,0)}$	n	$Q_n^{(-1/2,-1/2)}$	$r_n^{(-1/2,-1/2)}$
10	1.84(−1)	5.29(−2)	1.42(−1)	1	4.0801983843688532	9.35(−3)
20	1.08(−1)	2.64(−2)	8.69(−2)	2	4.1179039770237825	1.98(−4)
30	7.80(−2)	1.76(−2)	6.41(−2)	3	4.1186986430715864	4.79(−6)
40	6.17(−2)	1.32(−2)	5.14(−2)	4	4.1187178694526636	1.23(−7)
50	6.17(−2)	1.06(−2)	4.31(−2)	5	4.1187183615750484	3.24(−9)
60	5.14(−2)	8.81(−3)	3.73(−2)	6	4.1187183745672496	8.73(−11)
70	4.41(−2)	7.55(−3)	3.30(−2)	7	4.1187183749170540	2.38(−12)
80	3.88(−2)	6.61(−3)	2.96(−2)	8	4.1187183749266013	6.57(−14)
90	3.47(−2)	5.87(−3)	2.69(−2)	9	4.1187183749268644	1.83(−15)
100	2.87(−2)	5.29(−3)	2.47(−2)	10	4.1187183749268718	5.10(−17)

Na slici 1 predstavljena je ta težinska funkcija za $\alpha = 0$ i tri odabrane vrednosti parametra β.



Slika 1. Grafici težinskih funkcija $w(x)$ za $\alpha = 0$ i $\beta = -1/2$ (puna linija), $\beta = 0$ (isprekidana linija) i $\beta = 1/2$ (tačkasta linija).

Slično prethodnom, nalazimo odgovarajuće momente

$$\mu_k(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{k+\beta} \log\frac{1}{x(1-x)}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)}\left[2H(\alpha+\beta+k+1) - H(\beta+k) - H(\alpha)\right].$$

Primer 2. Za $\alpha = -1/4$ i $\beta = -1/2$ izračunaćemo

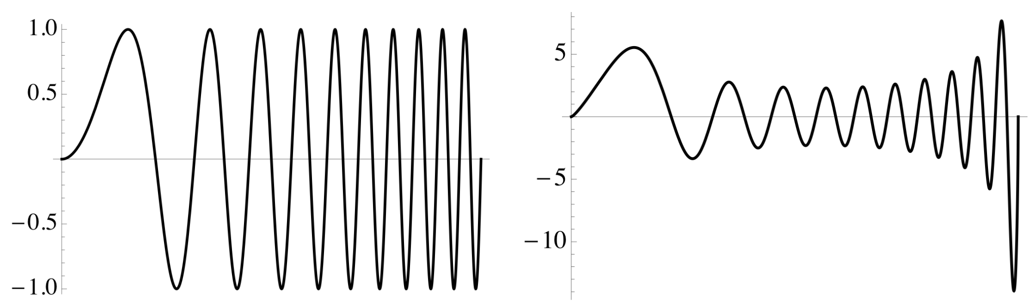
$$I_k = \int_{-1}^{1} f_k(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx \approx Q_n^{(\alpha,\beta)}(f_k), \qquad k = 1,2,$$

gde su $f_1(t) = \sin(10\pi x)$ i $f_2(t) = \sin(20\pi x^2)$.

Kao i u prethodnom slučaju, koristeći paket `OrthogonalPolynomials` [3], pisan u programskom sistemu Mathematica, dobijamo rekurzivne koeficijente i parametre Gauss-ovih formula za težinsku funkciju $w^{(-1/4,-1/2)}(x)$, a zatim ih primenjujemo na zadate integrale.

U prvom slučaju dobijamo rezultate prikazane u Tabeli 2, uključujući i odgovarajuće relativne greške. Netačne decimalne cifre su podvučene.

Grafici druge funkcije $f_2(t)$ i integranda $F_2(x) = f_2(x)\, w^{(-1/4,-1/2)}(x)$ su prikazani na Slici 2. Zbog oscilatornog integranda, zahtevamo više čvorova pri integraciji i zato polazimo sa n = 30 tačaka. Rezultati su dati u istoj tabeli.



Slika 2. Grafici funkcija $f_2(x) = \sin(20\pi x^2)$ (levo) i $F_2(x) = f_2(x) w^{(-1/4,-1/2)}(x)$ (desno)

Tabela 2. Gauss-ova kvadraturna suma $Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_k)$ sa odgovarajućim relativnim greškama $r_n(f_k)$, k =1,2

n	$Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_1)$	$r_n(f_1)$	$Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_2)$	$r_n(f_2)$
10	$0.5\underline{022466846173798}$	5.53 (–2)		
20	$0.531643144401\underline{4815}$	3.32 (–13)		
30	0.5316431444016578	2.88 (–29)	$0.4466\underline{5240303668106222}$	6.99 (–5)
40			$0.4466212016\underline{9680683776}$	3.43 (–11)
50			$0.446621201681477912\underline{72}$	1.14 (–19)
60			0.44662120168147791267	2.06 (–29)

3. Neke napomene o Gaussovim kvadraturnim formulama za Müntz-ove sisteme

Gauss-ova integracija može se proširiti na prirodan način na nepolinomske funkcije, uzimajući sistem linearno nezavisnih funkcija

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\} \qquad (x \in [a,b]), \tag{10}$$

izabranih tako da sistem bude kompletan u nekom pogodnom prostoru funkcija. Ako je $w(x)$ data nenegativna težina na $[a, b]$ i ako je kvadraturno pravilo

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f) \tag{11}$$

takvo da se integrali prvih $2n$ funkcija iz (10) tačno izračunavaju, tada kažemo da je kvadraturna formula (11) Gauss-ova u odnosu na sistem funkcija (10). Egzistencija i jedinstvenost Gauss-ovog kvadraturnog pravila (11) u odnosu na sistem (10), ili, kraće, uopštene Gauss-ove formule, je uvek zagarantovana ako prvih $2n$ funkcija tog sistema čine Čebiševljev sistem na $[a, b]$. Tada su sve težine $A_1, \ldots, A_n$ iz (11) pozitivne.

Uopštene Gauss-ove kvadrature za Müntz-ov sistem vode poreklo još od Stieltjes-a iz 1884. godine (videti [26]). Uzimajući $P_k(x) = x^{\lambda_k}$ na $[a, b] = [0, 1]$, gde su $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, Stieltjes je dokazao egzistenciju Gauss-ovih formula.

Ma, Rokhlin i Wandzura [14] su 1996. godine razvili jedan numerički postupak za konstrukciju uopštenih Gauss-ovih kvadratura, ali je njihov algoritam loše uslovljen. Nedavno, Milovanović i Cvetković [22], su izložili jedan alternativni numerički metod za konstrukciju generalizovane Gauss-ove kvadrature (11) za Müntz-ove polinome, koji je tačan za svaku linearnu kombinaciju prvih $2n$ Müntz-ovih monoma, tj. za svako $f \in M_{2n-1}(\Lambda) = \mathrm{span}\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_{2n-1}}\}$.

Metod je stabilan i znatno jednostavniji od prethodnog jer se temelji na konstrukciji i stabilnom računanju ortogonalnih Müntz-ovih sistema, prethodno razvijenih u radu [21]. Da bi se dobili parametri Gauss-ovih kvadratura za $n \le 40$, dovoljno je sprovesti izračunavanja u aritmetici dvostruke preciznosti (D–aritmetika, sa oko 16 dekadnih cifara, tj. REAL*8 kako se često označava), da bi se dobili rezultati iste takve preciznosti (za detalje videti [22] i [18]). Napomenimo da su u radu [14], za generisanje Gauss-ovih kvadratura do reda $n \le 20$, autori koristili Q-aritmetiku (približno 34 dekadne cifre, tj. REAL*16) da bi dobili rezultate dvostruke preciznosti (sa 16 dekadnih cifara). Međutim, za generisanje kvadratura višeg reda $(n \le 40)$, sa istom tačnošću, oni su bili prinuđeni da koriste aritmetiku sa čak 120 (dekadnih) cifara jer je njihov slabouslovljeni algoritam u stanju da “pojede’’ više od 100 cifara!

Primene kvadratura iz rada [22] u numeričkoj inverziji Laplace-ove transformacije date su u [24]. Neke metode transformacije za integrale sa Muntz-ovim polinomima mogu se naći u radovima [23] i [13].

Literatura

[1] Atkinson K. E., *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press: Cambridge, (1997).

[2] Belford G.G., *On an integration method for solving boundary value problem,* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **4**, pp. 566–568, (1973).

[3] Cvetković A. S., Milovanović G.V.*, The Mathematica Package "OrthogonalPolynomials",* Facta Univ. Ser. Math. Inform. **19**, pp. 17–36, (2004).

[4] Davis P. J. and Rabinowitz P., *Methods of Numerical Integration (2^{nd} edn.),* Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL. (1984).

[5] De Bonis M. C., Mastoianni G., *Projection methods and condition numbers in uniform norm for Fredholm and Cauchy singular integral equations,* SIAM J. Numer. Anal. **44.** pp. 1351–1374, (2006)

[6] Gautschi W., *Computational aspects of orthogonal polynomials,* Orthogonal Polynomials (Columbus, OH, 1989), P. Nevai (Ed.), pp. 181–216, NATO Adv. Sci. Ins. Ser. C: Math. Phys. Sci., 294, Kluwer, Dordrecht (1990).

[7] Gautschi W., *Gauss quadrature routines for two classes of logarithmic weight functions*, Numer. Algorithms **55,** pp. 265 – 277, (2010).

[8] Golub G. H. and Welsch J. H., *Calculation of Gauss quadrature rules,* Mathematics of Computation, **23**, pp. 221–230, (1969).

[9] Hajdin N. and Krajčinović D., *Integral equation method for solution of boundary value problems of structural mechanics, Part I. Ordinary differential equations,* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **7**, pp. 509–522, (1973).

[10] Hajdin, N., *Jedan postupak za numeričko rešavanje graničnih zadataka i njegova primena na neke problem teorije elastičnosti* (A method for numerical solution of boundary value problems and its aplication to certain problems of the theory of elasticity), Zbornik Građevinskog fakulteta br. 4, str. 1–57, (1958).

[11] Katsikadelis J.T., *Boundary Elements: Theory and Applications*, Elsevier, Amsterdam, 2002.

[12] Kythe P. K., Puri P., *Computational Methods for Linear Integral Equations,* Birkhäuser: Boston-Basel-Berlin, (2002).

[13] Lombardi G., *Design of quadrature rules for Müntz and Müntz-logarithmic polynomials using monomial transformation,* Internat. J. Numer. Meth. Engineering **80**, pp. 1687 – 1717, (2019).

[14] Ma J., Rokhlin V. and Wandzura S., *Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions,* SIAM Journal on Numerical Analysis, 33, pp. 971–996, (1996).

[15] Mastoianni G. and Milovanović G. V., *Interpolation Processes-Basic: Theory and Applications,* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (2008).

[16] Mastoianni G., Milovanović G. V., *Some numerical methods for second kind Fredholm integral equations on the real semiaxsis,* IMA J. Numer. Anal 29, pp. 1046–1066, (2009).

[17] Mastoianni G., Milovanović G. V., *Well-conditioned matrices for numerical treatment of Fredholm integral equations of the second kind,* Numer. Linear Algebra Appl. **16**, pp. 995–1011, (2009).

[18] Milovanović G. V., Igić T., *Gaussian rules for Müntz systems in the boundary element method*, 4^{th} Serbian-Greek Symposium, Recent Advanced in Mechanics, Vlasina, pp. 45–46, (2011).

[19] Milovanović G., Igić T., Tončev N., *Some quadrature rules for finite element method and boundary element method*, Third Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 2011, Vlasina Lake, Serbia C-40, pp. 684–693, (2011).

[20] Milovanović G., Igić T., Tončev N., *Quadrature formulae for problems in mechanics,* AIP Conference Proceedings, Publ. American Institute of Physic, 1479, pp. 1058–1061, (2012).

[21] Milovanović G.V. , *Müntz orthogonal polynomials and their numerical evaluation,* In: Applications and Computation of Orthogonal Polynomials (W. Gautschi, G.H. Golub, G. Opfer, eds.), pp. 179–202, ISNM, Vol. 131, Birkhäuser, Basel, (1999).

[22] Milovanović G.V., Cvetković A.S., *Gaussian type quadrature rules for Müntz systems,* SIAM J. Sci. Comput. **27**, pp. 893 – 913, (2005).

[23] Milovanović G.V., Cvetković A.S., *Numerical integration of functions with logarithmic end point singularity,* Facta Univ. Ser. Math. Inform. **17,** pp. 57–74, (2002).

[24] Milovanović G.V., Cvetković A.S., *Numerical inversion of the Laplace transform*, Facta Univ. Ser. Elec. Energ. **18,** pp. 515–530 (2005),.

[25] Piessens R. and Branders M., *Tables of Gaussian Quadrature Formulas,* University of Leuven, Leuven, (1975).

[26] Stieltjes T. J., *Sur une generalization de la theory des quadratures mécaniques,* Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris, 99, pp. 850–851, (1884).